C. Runge
Berlin

Ueber die

Krümmung, Torsion und geodätische Krümmung

der auf einer Fläche gezogenen Curven.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde

von der philosoph. Facultät der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin genehmigt

und öffentlich vertheidigt am 23. Juni

ACAD. LUGD. BAT BIBL.

von

CARL RUNGE aus Bremen.

Opponenten: Herr Dr. Rudio.
» W. Sachse.
» Piltz, stud. math.

Berlin 1880.

Königliche Hof-Buchdruckerei von Carl Friese in Magdeburg.

Wenn wir nun für x_1-x_0, x_2-x_0 u. s. w. die Potenzreihen einsetzen und die Bezeichnungen einführen:

$$e = \Sigma \left(\frac{dx}{du}\right)^2 \quad f = \Sigma \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} \quad g = \Sigma \left(\frac{dx}{dv}\right)^2$$

so wird diese Grösse:

$$e_0\,(u_1-u_0)\,(u_2-u_0) + f_0\,\big((u_1-u_0)\,(v_2-v_0) + (u_2-u_0)\,(v_1-v_0)\big) + g_0\,(v_1-v_0)\,(v_2-v_0) + (u_1-u_0,\ u_2-u_0,\ v_1-v_0,\ v_2-v_0)_3^*$$

Dies pflegt man auch so auszudrücken:

$$ds_1\,ds_2\,\cos(12) = e_0\,du_1\,du_2 + f_0\,(du_1\,dv_2 + du_2\,dv_1) + g_0\,dv_1\,dv_2$$

und, wenn $u_1 = u_2$ gesetzt wird:

$$ds^2 = e_0\,du^2 + 2f_0\,du\,dv + g_0\,dv^2$$

Denken wir uns, dass v den Werth v_0 beibehält, während u von u_0 an wächst, so beschreibt der entsprechende Punkt auf der Fläche eine von $u_0\,v_0$ ausgehende Curve, welche die u Parameterlinie heisst. Ihre Richtungscosinusse im Punkte $u_0\,v_0$ sind proportional den Grössen

$$\left(\frac{dx}{du}\right)_0 \quad \left(\frac{dy}{du}\right)_0 \quad \left(\frac{dz}{du}\right)_0$$

Ebenso erhalten wir eine v Parameterlinie, deren Richtungscosinusse den ersten Ableitungen nach v proportional sind. Da die drei Determinanten nicht sämmtlich verschwinden, so fallen die Richtungen der beiden Parameterlinien nicht zusammen.

Nehmen wir $u_1\,v_1$ auf der u Linie, $u_2\,v_2$ auf der v Linie an, also $v_1 = u_2 = 0$, so wird:

$$\Sigma\,(x_1-x_0)^2 = e_0\,(u_1-u_0)^2 + (u_1-u_0)_3$$
$$\Sigma\,(x_2-x_0)^2 = g_0\,(v_1-v_0)^2 + (v_2-v_0)_3$$
$$\Sigma\,(x_1-x_2)\,(x_2-x_0) = f_0\,(u_1-u_0)\,(v_2-v_0) + (u_1-u_0,\ v_2-v_0)_3$$

und daher, wie ersichtlich, $\frac{f_0}{\sqrt{e_0\,g_0}}$ gleich dem Cosinus des Winkels, welchen die beiden Parameterlinien einschliessen.

Die Quadratwurzel ist hier wie überall positiv zu nehmen.

Die Normale der Fläche denken wir uns nach derjenigen Seite gerichtet, welche bewirkt, dass die Richtungen der u und v Linien und der Normale zu einander liegen, wie die x- zur y- zur z-Achse. Seien X, Y, Z die Richtungscosinusse der Normale, so muss also

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

positiv sein.

* Das Symbol $(\,)_3$ bedeutet Glieder von dritter und höherer Dimension.

Bemerken wir noch, dass

$$\Sigma \left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right)^2 = eg - f^2$$

ist, so muss daher gesetzt werden

$$\sqrt{eg-f^2}\ X = \left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right) \text{ u. s. f.}$$

Alsdann ist

$$\Sigma\ X_0\ (x_1-x_0)$$

die Projection der Strecke *01* auf die Normale in *0*. Setzen wir hierin für x_1-x_0 u. s. w. die Potenzreihen ein, so fallen die linearen Glieder fort, weil

$$\Sigma X \frac{dx}{du} = 0 \quad \Sigma X \frac{dx}{dv} = 0$$

und gebraucht man die Bezeichnungen:

$$E = \Sigma X \frac{d^2x}{du^2},\ F = \Sigma X \frac{d^2x}{dudv},\ G = \Sigma X \frac{d^2x}{dv^2}$$

so wird die betreffende Grösse, wenn wir sie noch mit 2 multipliciren:

$$E\ (u_1-u_0)^2 + 2\ F\ (u_1-u_0)\ (v_1-v_0) + G\ (v_1-v_0)^2 + (u_1-u_0,\ v_1-v_0)_3$$

Dieser Ausdruck ist ähnlich zusammengesetzt wie $\Sigma (x_1-x_0)^2$. Ebenso existirt nun eine geometrische Grösse, welche aus EFG analog zusammengesetzt ist, wie $\Sigma (x_1-x_0)\ (x_2-x_0)$ aus e, f, g.

Es ist: $$X_2-X_0 = \left(\frac{dX}{du_0}\right)(u_2-u_0) + \left(\frac{dX}{dv_0}\right)(v_2-v_0) + (u_2-u_0,\ v_2-v_0)_2$$

Beachten wir nun, dass:

$$\Sigma X \frac{dx}{du} = 0 \quad \Sigma X \frac{dx}{dv} = 0$$

mithin, wenn wir diese Gleichungen nach u und v differenziiren:

$$\Sigma \frac{dX}{du}\frac{dx}{du} + E = 0 \quad \Sigma \frac{dX}{dv}\frac{dx}{du} + F = 0 \quad \Sigma \frac{dX}{du}\frac{dx}{dv} + F = 0 \quad \Sigma \frac{dX}{dv}\frac{dx}{dv} + G = 0$$

und bilden wir

$$-\Sigma\ (X_2-X_0)\ (x_1-x_0)$$

so kommt:

$$+ E(u_1-u_0)\ (u_2-u_0) + F\left((u_1-u_0)\ (v_2-v_0) + (u_2-u_0)\ (v_1-v_0)\right) + G\ (v_1-v_0)\ (v_2-v_0)$$
$$+ (u_1-u_0,\ v_1-v_0,\ u_2-u_0,\ v_2-v_0)_3$$

Die Grösse $-\Sigma (X_1-X_0)\ (x_2-x_0)$ würde dieselben Glieder zweiter Ordnung geben.

Die eine Grösse ist die Projection von *01* auf die Strecke deren Coord.

$$X_0-X_2,\ Y_0-Y_2,\ Z_0-Z_2$$

sind, multiplicirt mit der Länge derselben, die andere Grösse ist die Projection von *02* auf die Strecke

$$X_0-X_1\ \ Y_0-Y_1,\ Z_0-Z_1$$

multiplicirt mit der Länge derselben.

Diese Strecken haben eine einfache geometrische Bedeutung. Trage ich vom Endpunkt

der Normale in *0*, die Strecke $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$ ab, deren Endpunkt in *3* liege, so ist *0 3* die gesuchte Strecke.

Die Richtung der kürzesten Verbindungslinie der Normale in *0* und in *1* steht auch auf *0 3* senkrecht. Die Länge von *0 3* ist die Sehne des Winkels, welchen die Normalen mit einander bilden.

Denken wir uns eine Curve, die durch den Punkt *0* geht, dargestellt dadurch dass u_1-u_0, v_1-v_0 Potenzreihen von t_1-t_0 sind. Nähert sich der Punkt *1* auf dieser Curve dem Punkte *0*, so wird die Strecke *0 3*, sich einer gewissen Richtung unbeschränkt nähern, welche eine Tangente der Fläche ist. Betrachten wir die sämmtlichen Normalen der Curve als durch Bewegung einer Geraden beschrieben, so wird jene Tangente auf der momentanen Drehungs-Axe dieser Graden im Punkte *0* senkrecht stehen.

Sind 2 Curven gegeben und hat die eine im Punkte *0* die Richtung der Drehungsaxe der Normalen der zweiten, so wird

$$E\,(u_1\text{-}u_0)\,(u_2\text{-}u_0) + F\,\big((u_1\text{-}v_0)\,(v_2\text{-}v_0) + (u_2\text{-}u_0)\,(v_1\text{-}v_0)\big) + G\,(v_1\text{-}v_0)\,(v_2\text{-}v_0)$$

von dritter Ordnung unendlich klein, mithin ist:

$$E\left(\frac{du_1}{dt_1}\right)_0\left(\frac{du_2}{dt_2}\right)_0 + F\left(\left(\frac{du_1}{dt_1}\right)_0\left(\frac{dv_2}{dt_2}\right)_0 + \left(\frac{du_2}{dt_2}\right)_0\left(\frac{dv_1}{dt_1}\right)_0\right) + G\left(\frac{dv_1}{dt_1}\right)_0\left(\frac{dv_2}{dt_2}\right)_0 = 0$$

Zwei Richtungen, welche diese Beziehung erfüllen nennt man conjugirt. Der umgekehrte Schluss lässt sich jedoch nur mit folgender Einschränkung machen. Wenn zwei Richtungen die obige Beziehung erfüllen, und es wird für die eine die Länge der Strecke X_0-X_1, Y_0-Y_1, Z_0-Z_1 mit u_1-u_0, v_1-v_0 nicht von zweiter Ordnung unendlich klein, so liegt die zweite Richtung parallel zur Drehungsaxe der Normalen der ersten. Gesetzt aber die Länge jener Strecke würde von zweiter Ordnung unendlich klein, so ist die obige Beziehung für beliebige Werthe von $\left(\frac{du_2}{dt}\right)_0\left(\frac{dv_2}{dt}\right)_0$ erfüllt. Dieser Fall kann daher nur eintreten, wenn entweder $E = 0$, $F = 0$, $G = 0$, oder wenn $EG\text{-}F^2 = 0$. Im letzteren Falle ist

$$\sqrt{E}\left(\frac{du_1}{dt_1}\right)_0 \pm \sqrt{G}\left(\frac{dv_1}{dt_1}\right)_0 = 0$$

Die erste Curve kann dann also nur eine Richtung oder die entgegengesetzte haben.

Ist also $EG\text{-}F^2$ von *0* verschieden, so liegt von 2 conjugirten Richtungen die eine parallel der Drehungsaxe der Normalen der andern.

Die Kenntniss der Grössen e, f, g, E, F, G reicht aus, um die Fläche eindeutig zu bestimmen, abgesehen davon, dass sie noch beliebig im Raume verschoben und gedreht werden kann. Der Beweis dieses Satzes ist derselbe, wie der Beweis des analogen Satzes für ein Gebilde $n-1$ter Stufe in einem Gebiete $n$ter Stufe. Er werde daher gleich allgemein geführt.

Seien $x_1 - x_1^{(0)}, \ldots, x_n - x_n^{(0)}$ als Potenzreihen von $u_1 - u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1} - u_{n-1}^{(0)}$ gegeben. Die n Determinanten der linearen Glieder sollen für

$$u_1 = u_1^{(0)}, \ldots, u_{n-1} = u_{n-1}^{(0)}$$

nicht sämmtlich verschwinden.

Wir setzen

$$e_{\lambda\mu} = e_{\mu\lambda} = \sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\lambda}\frac{dx_\alpha}{du_\mu} \quad \alpha = 1 \ldots n$$

$$E_{\lambda\mu} = E_{\mu\lambda} = \sum_\alpha X_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{du_\lambda du_\mu}$$

$X_1 \ldots X_n$ sollen dabei den Unterdeterminanten der letzten Horizontalreihe in der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{du_1} & \ldots & \frac{dx_n}{du_1} \\ \vdots & & \\ \frac{dx_1}{du_{n-1}} & & \frac{dx_n}{du_{n-1}} \\ X_1 & & X_n \end{vmatrix}$$

proportional sein:

$$D\ X_\alpha = \left| \frac{dx_\lambda}{du_\mu} \right| \begin{matrix} \lambda = 1 \ldots \alpha - 1, \alpha + 1 \ldots n \\ \mu = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots n-1 \end{matrix}$$

D soll positiv und so gewählt sein, dass:

$$\Sigma\, X_\alpha^{\,2} = 1$$

Die obige Determinante ist dann gleich D. D selbst ist aber durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{\Sigma \left| \frac{dx_\lambda}{du_\mu} \right|^2}{D^2} = 1$$

Nach einem bekannten Determinantensatze ist nun

$$\Sigma \left| \frac{dx_\lambda}{du_\mu} \right|^2 = |e_{\lambda\mu}| \qquad \lambda, \mu = 1 \ldots n-1$$

Mithin ist D gleich der positiven Wurzel aus $|e_{\lambda\mu}| \cdot |e_{\lambda\mu}|$ ist also nach Voraussetzung von Null verschieden. Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\sum_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\lambda} \cdot \frac{dx_\nu}{du_\mu} + \sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\lambda} \frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\mu} = \frac{d}{du_\nu}(e_{\lambda\mu})$$

$$\sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\lambda} \frac{d^2x_\alpha}{du_\mu du_\nu} + \sum_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{du_\mu du_\lambda} \frac{dx_\alpha}{du_\nu} = \frac{d}{du_\mu}(e_{\lambda\nu})$$

$$\sum_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{du_\lambda du_\nu} \frac{dx_\alpha}{du_\mu} + \sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\nu} \frac{d^2x_\alpha}{du_\lambda du_\mu} = \frac{d}{du_\lambda}(e_{\mu\nu})$$

Daraus folgt

$$\sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\mu} \cdot \frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{du_\nu}(e_{\lambda\mu}) + \frac{d}{du_\lambda}(e_{\mu\nu}) - \frac{d}{du_\mu}(e_{\nu\lambda})\right)$$

Giebt man hierin μ die Werthe $1, \ldots, n-1$ und nimmt noch die Gleichung

$$\sum_\alpha X_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\lambda} = E_{\nu\lambda}$$

hinzu, so hat man für die n-Grössen $\frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\lambda}$ $\alpha = 1 \ldots n$ n Gleichungen, deren Determinante gleich D also von Null verschieden ist.

Möge die Unterdeterminante von $\frac{dx_\alpha}{du_\mu}$ in D bezeichnet werden mit $A_{\alpha\mu}$, so ist $A_{\alpha\mu}$ eine lineare homogene Function von

$$\frac{dx_\alpha}{du_\lambda} \quad \lambda = 1 \ldots n-1$$

denn es ist:

$$\sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\mu} \frac{dx_\alpha}{du_\lambda} = e_{\mu\lambda} \quad \mu = 1 \ldots, n-1$$

$$\sum_\alpha X_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\lambda} = 0$$

folglich $D \cdot \frac{dx_\alpha}{du_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n-1} A_{\alpha\mu} e_{\mu\lambda} \quad \lambda = 1, \ldots n-1$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergiebt sich $A_{\alpha\mu}$ als lineare Function von $\frac{dx_\alpha}{du_\lambda}$ $\lambda = 1 \ldots n-1$, in deren Coefficienten nur die $e_{\mu\lambda}$ vorkommen. Lösen wir daher die

Gleichungen für $\frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\lambda}$ auf, so kommt:

$$\frac{d^2x_\alpha}{du_\nu du_\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n-1} a_{\alpha\mu} \frac{dx_\alpha}{du_\mu} + E_{\lambda\nu} \cdot X_\alpha$$

wo die $a_{\alpha\mu}$ nur Function der $e_{\lambda\mu}$ und ihrer ersten Ableitungen sind.

Da ferner

$$\sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{du_\mu} \frac{dX_\alpha}{du_\lambda} = -E_{\mu\lambda} \quad \mu = 1 \ldots n-1$$

$$\sum_\alpha X_\alpha \frac{dX_\alpha}{du_\lambda} = 0$$

so wird $\frac{dX_\alpha}{du_\lambda}$ eine lineare Function von $\frac{du_\alpha}{du_\mu}$, $\mu = 1, \ldots n-1$, deren Coefficienten rationale Functionen von den $e_{\lambda\mu}$ und $E_{\lambda\mu}$ sind. —

Kehren wir nun zu unserer Fläche zurück, so können wir also schreiben:

$$\frac{d^2x}{du^2} = a \frac{dx}{du} + b \frac{dx}{dv} + E.X$$

$$\frac{d^2x}{dudv} = a' \frac{dx}{du} + b' \frac{dx}{dv} + F.X$$

$$\frac{d^2x}{dv^2} = a'' \frac{dx}{du} + b'' \frac{dx}{dv} + G.X$$

$$\frac{dX}{du} = \alpha \frac{dx}{du} + \beta \frac{dx}{dv}, \quad \frac{dX}{dv} = \alpha' \frac{dx}{du} + \beta' \frac{dx}{dv}$$

und dieselben Gleichungen für yY und zZ. Bildet man mit Hilfe dieser Gleichungen, die Ausdrücke $\Sigma \frac{dx}{du}\frac{d^2x}{du^2}$, $\Sigma \frac{dx}{dv}\frac{d^2x}{du^2}$ u. s. f. so kommt:

$$a\,e + b\,f = \tfrac{1}{2}\frac{de}{du} \qquad a\,f + b\,g = \frac{df}{du} - \tfrac{1}{2}\frac{de}{dv}$$

$$a'e + b'f = \tfrac{1}{2}\frac{de}{dv} \qquad a'f + b'g = \tfrac{1}{2}\frac{dg}{du}$$

$$a''e + b''f = \frac{df}{dv} - \tfrac{1}{2}\frac{dg}{du}, \quad a''f + b''g = \tfrac{1}{2}\frac{dg}{dv}$$

$$\alpha\,e + \beta\,f = -E \qquad \alpha\,f + \beta\,g = -F$$

$$\alpha'e + \beta'f = -F \qquad \alpha'f + \beta'g = -G$$

Eine jede Fläche führt also auf ein solches System von Differentialgleichungen.

Umgekehrt aber führt ein solches System nur dann zu einer Fläche, wenn die Bedingungen der Integrabilität erfüllt sind. Das heisst, es muss sein:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{d^2x}{du^2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{d^2x}{dudv}\right), \quad \frac{d}{dv}\left(\frac{d^2x}{dudv}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{d^2x}{dv^2}\right) \quad *)$$

*) Vergleiche Hoppe, Principien der Flächentheorie.

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dX}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dX}{dv}\right)$$

und die analogen Gleichungen für yY und zZ.

Betrachte ich eine der hingeschriebenen Gleichungen. Sie kann auf die Form gebracht werden: lineare Function von $\frac{dx}{du}$, $\frac{dx}{dv}$, X gleich Null. Für $\frac{dy}{du}\ \frac{dy}{dv}\ Y$ und $\frac{dz}{du}\ \frac{dz}{dv}\ Z$ gilt dieselbe Gleichung. Betrachte ich in diesen 3 Gleichungen die Coefficienten als Unbekannte, so genügen sie dreien homogenen Gleichungen, deren Determinante gleich:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & X \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & Y \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & Z \end{vmatrix}$$

gleich $\sqrt{eg - f^2}$, mithin von Null verschieden ist. Daher haben die 3 Gleichungen keine andre Lösung als, dass die Coefficienten einzeln Null sind. So entspringen die folgenden Relationen:

$$1\quad \frac{da}{dv} + ba'' + E\alpha' = \frac{da'}{du} + b'a' + F\alpha$$

$$2\quad \frac{db}{dv} + ab' + bb'' + E\beta' = \frac{db'}{du} + a'b + b'b' + F\beta$$

$$3\quad \frac{dE}{dv} + aF + bG = \frac{dF}{du} + a'E + b'F$$

$$1a\quad \frac{db''}{du} + a''b + G\beta = \frac{db'}{dv} + a'b' + F\beta'$$

$$2a\quad \frac{da''}{du} + b''a' + a''a + G\alpha = \frac{da'}{dv} + b'a'' + a'a' + F\alpha'$$

$$3a\quad \frac{dG}{du} + b''F + a''E = \frac{dF}{dv} + b'G + a'F$$

$$1b\quad \frac{d\alpha}{dv} + \alpha.a' + \beta a'' = \frac{da'}{du} + \alpha'a + \beta'.a'$$

$$2b\quad \frac{d\beta}{dv} + \alpha b' + \beta b'' = \frac{d\beta'}{du} + \alpha'b + \beta'b'$$

$$3b\quad \alpha F + \beta G = \alpha'E + \beta'F$$

Drückt man hierin alle Grössen durch $e\ f\ g\ E\ F\ G$ aus, so sind die Gleichungen 1, 2, 1a, 2a identisch; in ihnen wird $EG - F^2$ durch e, f, g dargestellt. 3 und 3a sind aequivalent mit 1b und 2b, 3b ist eine Identität.

Addirt man 3b zu 1 und subtrahirt davon 1a so kommt:

$$\frac{d\,(a+b')}{dv} = \frac{d\,(a'+b'')}{du}$$

In der That ist $a + b' = \frac{d\ lg\sqrt{eg - f^2}}{du}$, $a' + b'' = \frac{d\ lg\sqrt{eg - f^2}}{dv}$. —

Nehmen wir nun an, wir hätten für $e, f, g, E F G$ Potenzreihen von $u - u_0$, $v - v_0$ gefunden, welche den obigen Relationen genügen und sei $e_0 g_0 - f_0^2$ von Null verschieden, so können alle Grössen a, b u. s. f. als Potenzreihen von $u - u_0$, $v - v_0$ dargestellt werden. Sobald nur festgesetzt ist, welche Werthe x, y, z und die ersten Ableitungen von x, y, z nach u und v für u_0 v_0 haben sollen, Werthe, die den Gleichungen

$$\Sigma \left(\frac{dx}{du}\right)_2^0 = e_0 \quad \Sigma \left(\frac{dx}{du}\right)_0 \left(\frac{dx}{dv}\right)_0 = f_0 \quad \Sigma \left(\frac{dx}{dv}\right)_0^2 = g_0$$

zu genügen haben, im Uebrigen aber willkürlich sind, so lassen sich x, y, z eindeutig als Potenzreihen von $u - u_0$, $v - v_0$ entwickeln.

Setzt man $\frac{dx}{du} = \lambda_1 \quad \frac{dx}{dv} = \lambda_2$, so findet man aus:

$$\frac{d\lambda_1}{du} = a\,\lambda_1 + b\,\lambda_2 + E.X$$
$$\frac{d\lambda_2}{du} = a'\lambda_1 + b\,\lambda_2 + F.X$$
$$\frac{dX}{du} = \alpha'\,\lambda_1 + \beta'\,\lambda_2$$

wenn man darin $v = v_0$ setzt, λ_1, λ_2 und X als Potenzreihen von $u - u_0$, darnach findet man aus:

$$\frac{d\lambda_1}{dv} = a'\,\lambda_1 + b'\,\lambda_2 + FX$$
$$\frac{d\lambda_2}{dv} = a''\lambda_1 + b''\lambda_2 + GX$$
$$\frac{dX}{dv} = \alpha'\,\lambda_1 + \beta'\,\lambda_2$$

indem man als Anfangswerth die gefundenen Potenzreihen einsetzt, λ_1, λ_2, X als Potenzreihen von $u - u_0$, $v - v_0$; aus λ_1 und λ_2 durch Integration eine Potenzreihe für x.

Die 3 Gleichungen, denen die Anfangswerthe der ersten Ableitungen genügen müssen, drücken geometrisch nichts Anderes aus, als dass die beiden Strecken $\left(\frac{dx}{du}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{du}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{du}\right)_0$ und $\left(\frac{dx}{dv}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)_0$, $\left(\frac{ox}{dv}\right)_0$ gewisse Längen haben und einen gewissen Winkel einschliessen. Wenn daher zwei Systeme von Anfangswerthen vorliegen, so kann man ein neues congruentes Coordinatensystem einführen, in Bezug auf welches die Werthe des zweiten Systems gleich den entsprechenden Werthen des ersten in Bezug auf das alte Coordinatensystem sind. Für das aus dem zweiten System entspringende Flächenstück, erhält man in den neuen Coordinaten dieselben Potenzreihen, wie für das erste in den alten Coordinaten; mithin sind die beiden Flächenstücke congruent.

Aus dem Flächenstück entspringt durch Fortsetzung der Potenzreihen die ganze Fläche.

Sei eine Curve auf der Fläche durch den Punkt $u_0 v_0$ gelegt . $(u-u_0,\ v-v_0$ Potenzreihen von $t-t_0)$, so ist die doppelte Projection der Verbindungslinie von $u_0\, v_0$ mit $u\, v$ auf die Normale.

$$E\,(u-u_0)^2 + 2F\,(u-u_0)\,(v-v_0) + G\,(v-v_0)^2 + (u-u_0,\ v-v_0)_3$$

Es werde die Tangente der Curve im Punkte $u_0\, v_0$ gezogen, welche natürlich in die Tangentialebene der Fläche fällt. Durch die Verbindungslinie von $u\, v$ und $u_0\, v_0$ und die Tangentialebene lege ich eine Ebene. Dann ist die Entfernung des Punktes $u,\ v$ von der Tangentialebene, gleich der Entfernung desselben Punktes von der Tangente multiplicirt mit dem Sinus des Winkels, welchen die beiden Ebenen einschliessen. Dieser Winkel wird mit σ bezeichnet, so ist also die doppelte Entfernung des Punktes $u,\ v$ von der Tangente gleich

$$\frac{1}{\sin\,\sigma}\left\{ E\,(u-u_0)^2 + 2F\,(u-u_0)\,(v-v)_0 + G\,(v-v_0)^2 + (u-u_0,\ v-v_0)_3 \right\}$$

Die Krümmung einer Curve ist der Grenzwerth, welchem sich die doppelte Entfernung von der Tangente, dividirt durch das Quadrat der Entfernung vom Berührungspunkt nähert; also gleich

$$lim\ \frac{E\,(u-u_0)^2 + 2F\,(u-u_0)\,(v-v_0) + G\,(v-v_0)^2 + \ldots}{sin\ \sigma\ (e\,(u-u_0)^2 + 2f\,(u-u_0)\,(v-v_0) + g\,(v-v_0)^2 + \ldots)}$$

(wobei die Krümmung positiv oder negativ gerechnet wird, je nachdem die Projection auf die Normale positiv oder negativ ist). Werden $u-u_0$, $v-v_0$ unendlich klein, so geht jene construirte Ebene in die Schmiegungsebene der Curve über.

Bezeichnen wir $\dfrac{\left(\frac{du}{dt}\right)_0}{\sqrt{e\left(\frac{du}{dt}\right)_0^2 + 2f\left(\frac{du}{dt}\right)_0\left(\frac{dv}{dt}\right)_0 + g\left(\frac{dv}{dt}\right)_0}}$ mit $\frac{du}{ds}$ und den analogen Ausdruck mit $\frac{dv}{ds}$ so wird also die Krümmung der Curve:

$$\frac{1}{\sin\,\sigma_0}\left(E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right)$$

Die Krümmung eines Normalschnittes also:

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$\frac{E}{e}$ und $\frac{G}{g}$ sind also die Krümmungen der Normalschnitte in der Richtung der u und v Parameterlinien. Die Grössen $\frac{du}{ds}$ und $\frac{dv}{ds}$ können mannigfache Werthe annehmen; sie müssen nur die Relation:

$$e\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2f\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + g\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

erfüllen.

Nach bekannter Regel liefert daher die Gleichung in λ

$$\begin{vmatrix} E-\lambda e\ ,\ F-\lambda f \\ F-\lambda f\ ,\ G-\lambda f \end{vmatrix} = 0$$

das Maximum und Minimum der Krümmungen der Normalschnitte. Die zugehörigen Werthe von $\frac{du}{ds}$ und $\frac{dv}{ds}$ genügen den Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned}(E-\lambda e)\frac{du}{ds}+(F-\lambda f)\frac{dv}{ds}&=0\\ (F-\lambda f)\frac{du}{ds}+(G-\lambda g)\frac{dv}{ds}&=0\end{aligned}$$

Die obige Gleichung ergiebt, dass

$$\frac{EG-F^2}{eg-f^2}$$

das Product der Hauptkrümmungen und

$$\frac{Eg+Ge-2fF}{eg-f^2}$$

die Summe der beiden Hauptkrümmungen ist. Stehen die beiden Parameterlinien auf einander senkrecht, so ist $f=0$ also die Summe der Hauptkrümmungen gleich $\frac{E}{e}+\frac{G}{g}$ d. h. gleich der Summe der Krümmungen der beiden Parameterlinien. Für die beiden Hauptkrümmungen folgt aus den obigen Gleichungen. (1)

$$(2)\qquad \begin{aligned}&E\left(\frac{du}{ds}\right)_1\left(\frac{du}{ds}\right)_2+F\left(\left(\frac{du}{ds}\right)_1\left(\frac{dv}{ds}\right)_2+\left(\frac{du}{ds}\right)_2\left(\frac{dv}{ds}\right)_1\right)+G\left(\frac{dv}{ds}\right)_1\left(\frac{dv}{ds}\right)_2\\ &-\lambda\left(e\left(\frac{du}{ds}\right)_1\left(\frac{du}{ds}\right)_2+f\left(\left(\frac{du}{ds}\right)_1\left(\frac{dv}{ds}\right)_2+\left(\frac{dv}{ds}\right)_1\left(\frac{du}{ds}\right)_2\right)+g\left(\frac{dv}{ds}\right)_1\left(\frac{dv}{ds}\right)_2\right)=0\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für beide Werthe von λ. Wenn also die beiden Werthe von einander verschieden sind, so müssen die beiden Coefficienten Null sein. D. h. die Richtungen der beiden Hauptkrümmungen sind zugleich auf einander senkrecht, und einander conjugirt.*) Haben die Parameterlinien die Richtungen der Hauptkrümmungen, so ist $\lambda_1=\frac{E}{e}$ und $\lambda_2=\frac{G}{g}$ folglich

$$F-\lambda_1 f=0$$
$$F-\lambda_2 f=0$$

Wenn also nicht $\lambda_1=\lambda_2$ so muss dann

$$f=0\quad F=0$$

sein.

Wenn $\lambda_1=\lambda_2$, d. h. wenn die Krümmungen aller Normalschnitte einander gleich sind, so müssen die Gleichungen *(1)* für beliebige Richtungen erfüllt sein, folglich

$$\frac{E}{e}=\frac{F}{f}=\frac{G}{g}=\lambda$$

Dann ist auch die Gleichung *(2)* für beliebige Richtungen erfüllt, d. h. irgend zwei auf einander senkrechte Richtungen sind conjugirt und umgekehrt.

---

*) Hoppe, Flächentheorie.

Aus Gleichung *(2)* folgen mit Anwendung von

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)_1^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)_1\left(\frac{dv}{ds}\right)_1 + G\left(\frac{dv}{ds}\right)_1^2 = 0$$
$$-\lambda_1\left(e\left(\frac{du}{ds}\right)_1^2 + 2f\left(\frac{du}{ds}\right)_1\left(\frac{dv}{ds}\right)_1 + g\left(\frac{dv}{ds}\right)_1^2\right)$$

und der analogen für die zweite Hauptrichtung wiederum die Gleichungen *(1)*, so dass man auch den Satz hat: zwei Richtungen, welche zugleich aufeinander senkrecht und einander conjugirt sind, fallen mit den Hauptkrümmungsrichtungen zusammen. —

Wir können von vorne herein auch von dieser Eigenschaft ausgehen, um die Haupt-Krümmungsrichtungen zu erhalten. Es werde also eine Richtung im Punkte $u_0\, v_0$ gesucht, für welche die Drehungsaxe der Normalen auf der Tangente senkrecht steht. Für dieselbe muss sich dann die Strecke X_0-X_1, Y_0-Y_1, Z_0-Z_1 derselben oder der entgegengesetzten Richtung nähern wie die Strecke x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0

Wir haben daher:

$$X_0\text{-}X_1 = -\lambda\,(x_1\text{-}x_0) + (u_1\text{-}u_0,\ v_1\text{-}v_0)_2$$

oder

$$\left(\alpha\left(\frac{dx}{du}\right)_0 + \beta\left(\frac{dx}{dv}\right)_0\right)(u_1\text{-}u_0) + \left(\alpha'\left(\frac{dx}{du}\right)_0 + \beta'\left(\frac{dx}{dv}\right)_0\right)(v_1\text{-}v_0) =$$
$$= -\lambda\left(\frac{dx}{du}\right)_0(u_1\text{-}u_0) - \lambda\left(\frac{dx}{dv}\right)_0(v_1\text{-}v_0) + (u_1\text{-}u_0,\ v_1\text{-}v_0)_2$$

oder:

$$\left((\alpha+\lambda)(u_1\text{-}u_0) + \alpha'(v_1\text{-}v_0)\right)\left(\frac{dx}{du}\right)_0 + \left(\beta(u_1\text{-}u_0) + (\beta'+\lambda)(v_1\text{-}v_0)\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)_0$$
$$= (u_1\text{-}u_0,\ v_1\text{-}v_0)_2$$

oder:

$$\left((\alpha+\lambda)\left(\frac{du}{dv}\right)_0 + \alpha'\right)\left(\frac{dx}{du}\right)_0 + \left(\beta\left(\frac{du}{dv}\right)_0 + \lambda\right)\left(\frac{dx}{dv}\right)_0 = 0$$

Und da dieselbe Gleichung bestehen bleiben muss für y und z, und wenigstens eine der drei Determinanten nicht verschwindet so haben wir

$$(\alpha+\lambda)\left(\frac{du}{dv}\right)_0 + \alpha' = 0$$

$$\beta\left(\frac{du}{dv}\right)_0 + \beta' + \lambda = 0$$

Daraus

$$\begin{vmatrix} \alpha+\lambda, & \alpha' \\ \beta, & \beta'+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Nun ist

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}$$

$$\alpha + \beta' = -\frac{Eg + Ge - 2fF}{eg - f^2}$$

Die beiden Werthe von λ sind mithin gleich den beiden Hauptkrümmungen. Hat die u-Linie die Richtung einer Hauptkrümmung, so folgt aus:

$$\beta \left(\frac{du}{dv}\right)_0 + \beta' + \lambda = 0$$

das $\beta = 0$ sein muss; hat die v-Linie die Richtung einer Hauptkrümmung, so ist $\alpha' = 0$. Und umgekehrt.

Auf der Schmiegungsebene der u-Parameterlinie werde die Normale nach der Seite errichtet, dass die Richtungscosinus sich um einen positiven Factor von den Grössen

$$\left(\frac{dy}{du}\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du}\frac{d^2y}{du^2}\right)$$

unterscheiden. D. h. geometrisch: die Richtung der Curve, der Krümmungsradius und diese Normale liegen zu einander, wie die positiven Richtungen der x-, y- und z-Achse.

Jene Grössen formen wir mit Hilfe der Differential-Gleichungen um und finden z. B. die hingeschriebene Grösse gleich

$$b\left(\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}\right) + E\left(Z\frac{dy}{du} - Y\frac{dz}{du}\right)$$

oder, was dasselbe ist, gleich

$$b\,.\sqrt{eg-f^2}\;X + E\,\frac{f\frac{dx}{du} - e\frac{dx}{dv}}{\sqrt{eg-f^2}}$$

Die beiden andern Grössen gehen aus dieser durch Vertauschung von X, x mit Y, y und Z, z hervor.

Die Richtungscosinusse werden demnach gleich

$$\frac{b\,(eg - f^2)\,.\,X + E\left(f\frac{dx}{du} - e\frac{dx}{dv}\right)}{\sqrt{eg-f^2}\,.\,\sqrt{b^2\,(eg-f^2) + eE^2}}$$

und den ähnlichen Grössen.

Den Cosinus des Winkels, welchen diese Richtung mit der Normale der Fläche bildet, erhalte ich, wenn ich die einzelnen Grössen mit $X\ Y\ Z$ multiplicire und addire. Dann ergiebt sich

$$cos\ \sigma_u = \frac{b\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{b^2\,(eg-f^2) + eE^2}}$$

Daraus:

$$sin\ \sigma_u = \frac{\sqrt{e}\,.\,\sqrt{E^2}}{\sqrt{b^2\,(eg-f^2) + eE^2}}$$

(die Wurzel ist positiv zu nehmen), und endlich

$$ctg\ \sigma_u = \frac{b\,.\,\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{e}\,.\,\sqrt{E^2}}$$

Auf demselben Wege erhält man für die v-Parameterlinie

$$\cos \sigma v = \frac{-\, a'' \cdot \sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{a''^2 (eg - f^2) + g G^2}}$$

$$ctg\ \sigma v = \frac{-\, a'' \cdot \sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{g} \cdot \sqrt{G^2}}$$

Nennen wir solche Curven, deren Schmiegungsebene überall durch die zugehörige Flächennormale geht, geodätische Linien, so muss also, wenn die u-Parameterlinien geodätische sein sollen, $b = 0$ sein. Umgekehrt, wenn $b = 0$ ist und nur E von 0 verschieden, so sind die u-Parameterlinien geodätisch.

Wenn dagegen $E = 0$, so ist für einen beliebigen Werth von b immer

$$\cos \sigma u = \pm 1$$

Wenn die u-Perameterlinien geodätisch sind und u die Länge derselben bedeutet, von irgend einer Curve, die alle durchschneidet angerechnet, so ist zugleich:

$$e = 1\ ,\ b = 0$$

Nun ergiebt sich aber aus unseren Gleichungen

$$(eg - f^2)\ b = e \left(\frac{df}{du} - \tfrac{1}{2} \frac{de}{dv}\right) - \tfrac{1}{2} f \frac{de}{du}$$

mithin

$$\frac{df}{du} = 0$$

f ist also längs irgend einer geodätischen Linie constant.

Wenn demnach längs einer v-Parameterlinie im speciellen Falle $f = 0$ ist, so ist f überall gleich Null. D. h. wenn die u-Parameterlinien irgend eine v-Parameterlinie rechtwinklig schneiden, so schneiden sie alle rechtwinklig.* —

Auf dieselbe Weise bilden wir die Ausdrücke für die Torsion der u- und v-Parameterlinien.

Seien ξu, ηu, ζu die Richtungscosinusse der Normale der Schmiegungsebene, so ist die Torsion:

$$lim \left\{ \frac{6 \cdot \Sigma\, \xi u\, (u_1 - u_0)}{\sqrt{\Sigma\, (x_1 - x_0)^2}^3} \right\}^{\dagger}$$

Setzen wir für $x_1 - x_0$ u. s. f. die Potenzreihen ein, so fallen die Glieder erster und zweiter Dimension fort und es wird die Grenze jenes Ausdruckes:

$$\frac{\Sigma\, \xi u \frac{d^3 x}{du^3}}{\sqrt{e}^3}$$

---

* Gauss, Disquisitiones circa superficies curvas.

† Die hier definirte Torsion ist nicht mit dem identisch, was man gewöhnlicher Weise unter Torsion versteht; sondern geht aus der üblichen Grösse durch Multiplication mit der Krümmung hervor. Mir scheint indessen der hier aufgestellte Begriff der Torsion, nämlich: „Der Grenzwerth der 6fachen Projection der Strecke $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$ auf die Normale der Schmiegungsebene dividirt durch die 3te Potenz der Länge derselben", der gegebenen Definition der Krümmung analoger zu sein.

$\frac{d^2x}{du^3}$ kann mit Hilfe unserer Differentialgleichungen auf die Form:

$$\bar{a}\,\frac{dx}{du} + \bar{b}\,\frac{dx}{dv} + \bar{E}X$$

gebracht werden. ξu, ηu, ζu haben wir schon auf diese Form gebracht. Setzen wir diese Ausdrücke ein, so wird die Torsion:

$$\frac{b\,(eg - f^2)\,\bar{E} + E\,(ef\bar{a} + \bar{b}f^2 - ef\bar{a} - \bar{b}eg)}{\sqrt{eg - f^2}\,.\,\sqrt{e^3}\,.\,\sqrt{b^2\,(eg - f^2) + eE^2}}$$

oder:

$$\frac{(b\bar{E} - E\bar{b})\,.\,\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e^3}\,.\,\sqrt{b^2\,(eg - f^2) + eE^2}}$$

und wenn man für $\bar{E}$ und $\bar{b}$ ihre Ausdrücke setzt

$$\frac{(b\frac{dE}{du} - E\frac{db}{du} + b^2F - bb'\,.\,E - E^2\beta)\,\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e^3}\,.\,\sqrt{b^2\,(eg - f^2) + eE^2}}$$

Auf demselben Wege erhält man die Torsion der v-Parameterlinie:

$$\frac{-(a''\frac{dG}{dv} - G\frac{da''}{dv} + a''^2F - a''\,.\,a'\,.\,G - G^2a')\,.\,\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{g^3}\,.\,\sqrt{a''^2\,(eg - f^2) + gG^2}}$$

Nehmen wir an, die u- und v-Parameterlinien ständen in irgend einem Punkte, in welchem wir die Torsion der u-Parameterlinie untersuchen wollen nicht aufeinander senkrecht, so können wir neue v-Parameterlinien einführen von der Art, dass es der Fall ist. Die u-Parameterlinien bleiben dabei ungeändert, also auch die Torsion.

Wir können daher unbeschadet der Allgemeinheit in dem Ausdruck der Torsion $f = 0$ setzen. Dann ist

$$\beta = -\frac{F}{g}\,,\; b' = \frac{d\lg\sqrt{g}}{du}$$

Mithin wird der Ausdruck der Torsion:

$$\Big(\frac{d\lg}{du}\,\big(\frac{E}{b\,.\,\sqrt{g}}\big) + \frac{F}{\sqrt{g}}\big(\frac{b\,.\,\sqrt{g}}{E} + \frac{E}{b\,.\,\sqrt{g}}\big)\Big)\frac{.\;bE\;.\;\sqrt{eg}}{\sqrt{e^3}\sqrt{b^2eg + eE^2}}$$

Nehmen wir an, E sei positiv, was durch passende Wahl der Coordinatenachsen erreicht werden kann, so ist nach dem Obigen

$$tg\,\sigma u = \frac{E}{b\,.\,\sqrt{g}}$$

Also können wir schreiben:

$$\Big(\frac{dtg\,\sigma u}{du} + \frac{F}{\sqrt{g}}\,(1 + tg^2\,\sigma u)\Big)\frac{b^2\,.\,g}{e.\sqrt{b^2eg + eE^2}}$$

oder

$$\Big(\frac{d\sigma u}{du} + \frac{F}{\sqrt{g}}\Big)\,\frac{1}{\sqrt{e\,.\,\cos\sigma u}}\,\frac{b\,.\,\sqrt{g}}{e}$$

Wir werden später sehen, dass auch $\frac{b\sqrt{g}}{e}$ eine geometrische Bedeutung hat, es ist nämlich die sogenannte geodätische Krümmung der u-Linie.

Oder wir können auch schreiben:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{d\sigma u}{du} + \frac{F}{\sqrt{eg}}\right) \frac{E}{e} \cdot \frac{1}{\sin \sigma u}$$

$\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{d\sigma u}{du}$ hat eine geometrische Bedeutung. Nehmen wir einen Punkt auf der u-Parameterlinie an, nahe bei dem betrachteten Punkte und dividiren die Aenderung von σu durch seine Entfernung von demselben, so ist $\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{d\sigma u}{du}$ der Grenzwerth dieses Ausdruckes. $\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{d\sigma u}{du}$ ist also der Differentialquotient nach der Bogenlänge.

$\frac{1}{\sin \sigma u} \frac{E}{e}$ ist die Krümmung der u-Linie.

Setzt man an Stelle der v-Parameterlinien jetzt wiederum beliebige, so tritt an die Stelle von $\frac{F}{\sqrt{eg}}$ nunmehr $\frac{Fe - fE}{e\sqrt{eg-f^2}}$ oder was dasselbe ist $-\frac{\beta \cdot \sqrt{eg - f^2}}{e}$, so dass die Torsion wird

$$\left(\frac{d\sigma u}{\sqrt{e}\, du} - \frac{\beta \cdot \sqrt{eg - f^2}}{e}\right) \frac{E}{e} \cdot \frac{1}{\sin \sigma u}$$

$-\frac{\beta \cdot \sqrt{eg - f^2}}{e} \cdot \frac{E}{e}$ ist, wie man leicht sieht, die Torsion derjenigen geodätischen Linie, die in dem betrachteten Punkte dieselbe Richtung wie die u-Linie hat. Denn führt man irgend welche neue u-Linien ein, so jedoch, dass die neue u-Linie in dem betrachteten Punkte dieselbe Richtung hat wie die alte, so bleibt der Werth von $\frac{\beta \cdot \sqrt{eg - f^2}}{e} \cdot \frac{E}{e}$ in diesem Punkte ungeändert. Für die geodätische Linie aber ist σu constant und gleich $\frac{\pi}{2}$; somit fällt $\frac{d\sigma u}{du}$ fort und $\sin \sigma u$ ist gleich 1. Wenn die u-Parameterlinie Krümmungslinie ist, so ist nach dem Früheren $\beta = 0$. Für jede Krümmungslinie ist also die Torsion einer geodätischen Linie, welche sie berührt, im Berührungspunkte Null. Ebenso für jede asymptotische Curve; denn für eine solche ist $E = 0$.

Bezeichnen wir mit T die Torsion einer Curve, mit Tg die Torsion der geodätischen, welche die gleiche Richtung hat, mit K die Krümmung der Curve, so ist:

$$\frac{K}{\sqrt{e}} \frac{d\sigma u}{du} + \frac{Tg}{\sin \sigma u} = T$$

Für eine Krümmungscurve ist

$$Tg = 0$$

Mithin wenn nicht zugleich $sin\ \sigma u = 0$

$$K \cdot \frac{d\sigma u}{\sqrt{e}\, \sigma u} = T \text{ *)}$$

Hieraus folgt der Satz:

Wenn die Torsion einer Krümmungslinie Null ist, so ist entweder

$$K = 0 \text{ oder } \frac{d\sigma u}{du} = 0$$

Eine ebene Krümmungslinie ist daher entweder eine grade Linie oder ihre Schmiegungsebene bildet mit der Tangentialebene einen constanten Winkel. Umgekehrt bildet die Schmiegungsebene einer Krümmungscurve mit der Tangentialebene überall einen constanten Winkel, so ist sie eben.

Schneiden sich zwei Flächen in einer Curve, welche für beide Krümmungscurve ist, so folgt

$$K\, d\, \frac{(\sigma u - \sigma^1 u)}{du} = 0$$

folglich ist entweder $\sigma u - \sigma^1 u$ constant oder die Curve ist eine Grade. Im ersten Falle schneiden sich die Flächen längs der Curve unter constantem Winkel. Im zweiten Falle ist $E = 0$ und daher $\alpha = \beta = 0$ längs der Graden, und daraus folgt, dass $X\ Y\ Z$ sich für beide Flächen längs der Graden nicht ändern; also schneiden sie sich auch in diesem Fall unter constantem Winkel. Für jede ebene Curve ist:

$$\frac{K}{\sqrt{e}} \frac{d\sigma}{du} + \frac{Tg}{sin\ \sigma u} = 0$$

Schneidet also eine Ebene eine Fläche unter constantem Winkel, so ist die Torsion jeder geodätischen Linie, welche die Durchschnittscurve berührt, im Berührungspunkte Null. Dieselbe ist daher entweder eine asymptotische Curve oder Krümmungscurve.

Setzt man an Stelle von u und v zwei von einander unabhängige Functionen zweier Grössen $u^1\ v^1$, so treten an Stelle der alten u- und v-Linien die neuen u^1- und v^1-Linien. $\frac{d^2x}{du^{12}}$ wird wieder eine lineare Function von $\frac{dx}{du^1}\ \frac{dx}{dv^1}\ X$ und es mögen die Coefficienten von $\frac{dx}{du^1}$, $\frac{dx}{dx^1}$ mit $\overline{a}\ \overline{b}$ bezeichnet werden. Dann ergiebt sich:

---

*) Wenn η der Winkel der Schmiegungsebene mit einer festen Ebene, so ist $T = K \cdot \frac{d\eta}{ds}$ und da $\frac{d\sigma u}{\sqrt{e}\, du} = \frac{d\sigma}{ds}$, so kann man also schreiben

$$d\sigma = d\eta$$

In dieser Form ist der Satz unter dem Namen des Lancret'schen Theorem's bekannt. Vergl. Salmon, analyt. Geom. des Raumes, II. Art. 52.

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & \frac{du}{dv^1} \\ \frac{dv}{du^1} & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix} \cdot \bar{a} = \begin{vmatrix} a & \frac{du}{dv^1} \\ b & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix} \left(\frac{du}{du^1}\right)^2 + \begin{vmatrix} a' & \frac{du}{dv^1} \\ b' & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'' & \frac{du}{dv^1} \\ b'' & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix} \left(\frac{dv}{du^1}\right)^2 + \begin{vmatrix} \frac{d^2u}{du^{12}} & \frac{du}{dv^1} \\ \frac{d^2v}{du^{12}} & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & \frac{du}{dv^1} \\ \frac{dv}{du^1} & \frac{dv}{dv^1} \end{vmatrix} \cdot \bar{b} = \begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & a \\ \frac{dv}{du^1} & b \end{vmatrix} \left(\frac{du}{du^1}\right)^2 + \begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & a' \\ \frac{dv}{du^1} & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & \frac{dv}{du^1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & a'' \\ \frac{dv}{du^1} & b'' \end{vmatrix} \left(\frac{dv}{du^1}\right)^2 + \begin{vmatrix} \frac{du}{du^1} & \frac{d^2u}{du^{21}} \\ \frac{dv}{du^1} & \frac{d^2v}{du^{12}} \end{vmatrix}$$

Seien nun die v-Linien mit den v'-Linien identisch oder was gleichbedeutend ist, sei

$$u = u'$$

Soll die neue u'-Linie im Punkte $u_0\, v_0$ geodätisch sein, so muss $\bar{b} = 0$ sein.

Da $u = u'$, so giebt uns $\bar{b} = 0$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die u'-Linie zwischen u und v und es wird möglich sein, sobald die Richtung derselben im Punkte $u_0\ v_0$ gegeben ist, v-v_0 als Potenzreihe von u-u_0 eindeutig darzustellen.

Für diejenige geodätische Linie, welche im Punkte $u_0\ v_0$ die Richtuug der u-Linie hat, ist

$$\left(\frac{dv}{du}\right)_0 = 0$$

Mithin

$$\left(\frac{d^2v}{du^2}\right)_0 = -\ b$$

und es wird

$$v\text{-}v_0 = -\ \tfrac{1}{2}\, b\ (u - u_0)^2 + \ldots$$

u, v_0 ist ein Punkt auf der u-Linie.

Die durch ihn laufende v-Linie schneidet die geodätische in einem Punkte u,v. Der Abstand von u, v_0 und u,v ist:

$$\sqrt{g_0}\ (v_0\text{-}v) + (v_0\text{-}v)_2$$

Wir rechnen ihn also positiv, sobald u,v_0 auf der positiven Seite der geodätischen Linie liegt, negativ, wenn auf der negativen.

Die geodätische Linie im Punkte $u\,v$ bildet mit der v-Parameterlinie in demselben Punkte einen Winkel, welcher bis auf Grössen, die mit u-u_0 unendlich klein werden, gleich dem Winkel der u- und v-Linien im Punkte $u_0\ v_0$ ist.

Daher ist der senkrechte Abstand des Punktes u,v_0 von der geodätischen Linie gleich

$$\sqrt{g_0} \cdot \frac{\sqrt{e_0 g_0 - f^2}}{\sqrt{e_0\, g_0}} \cdot (v_0\text{-}v) + (v\text{-}v_0)\ (u\text{-}u_0,\ v\text{-}v_0)$$

Oder

$$\tfrac{1}{2}\ b \cdot \frac{\sqrt{e_0 g_0 - f_0}}{\sqrt{e}}\ (u\text{-}u_0)^2 + (u\text{-}u_0)_3$$

Dividire ich das doppelte dieses Abstandes durch das Quadrat der Entfernung von $u_0\ v_0$ und lasse alsdann u-u_0 unendlich klein werden, so nähert sich der Ausdruck dem Grenzwerth

$$b \cdot \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e^3}}$$

welcher die geodätische Krümmung der u-Linie im Punkte $u_0\ v_0$ genannt wird.

Durch Uebergang zu neuen Parametern erhalten wir den Ausdruck der geodätischen Krümmung einer beliebigen Curve.

$$u = f_1\ (u'\ v') \quad v = f_2\ (u'\ v')$$

für einen constanten Werth von v' stellen diese Gleichuugen eine der neuen u'-Linien dar. Die geodätische Krümmung wird

$$\overline{b} \cdot \frac{\sqrt{\overline{eg} - \overline{f}^2}}{\sqrt{\overline{e}^3}}$$

Dabei ist:

$$\overline{eg} - \overline{f}^2 = (eg - f^2) \cdot \begin{vmatrix} \frac{du}{du'} & \frac{du}{dv'} \\ \frac{dv}{du'} & \frac{dv}{dv'} \end{vmatrix}^2$$

$$\overline{e} = e \left(\frac{du}{dv'} \frac{du}{dv'} + g \frac{dv}{dv'} \right)^2$$

Wählen wir v', so, dass $\left(\frac{du}{du'} \frac{dv}{dv'} - \frac{du}{dv'} \frac{dv}{du'} \right)$ positiv ist, was geometrisch nichts Anderes heisst, als dass die u'- und v'-Linien zu einander wie die u- und v-Linien liegen, so wird

$$\sqrt{\overline{eg} - \overline{f}^2} = \sqrt{eg - f^2} \left(\frac{du}{du'} \frac{dv}{dv'} - \frac{du}{dv'} \frac{dv}{du'} \right)$$

und die Determinante hebt sich also weg.

Der Ausdruck, den man alsdann erhält, wird positiv oder negativ, je nachdem sich die Curve nach der positiven oder negativen Seite der sie berührenden geodätischen Linie krümmt.

Aus dem Ausdruck für $ctg\ \sigma_u$ ersieht man, dass

$$\frac{cos^2\ \sigma_u}{sin^2\ \sigma_u} \left(\frac{E}{e} \right)^2 = \frac{b^2\ (eg - f^2)}{e^3}$$

Da $\frac{1}{sin\ \sigma_u} \frac{E}{e}$ die Krümmung der Curve ist, so sieht man dass die geodätische Krümmung abgesehen von ihrem Vorzeichen, der Krümmung ihrer Projection auf die Tangentialebene gleich ist. Man kann daher die geodätische Krümmung durch diese Eigenschaft derselben definiren; jedoch muss dann die Bedeutung des Vorzeichens noch untersucht werden, welche sich hier von selbst ergiebt.

Die erste Variation des Integrals

$$\int_{t_0}^{t_1} F\,(u,\ v,\ u'\ v')\ dt$$

(wo u, v Functionen von t, u' v' die ersten Ableitungen derselben sind) zwischen festen Grenzen stellt sich bekanntlich in der Form dar:

$$\int_{t_0}^{t_1} H\ .\ (v'\xi - u'\eta)\ dt$$

wo ξ η die Variationen von u und v und wo H gleich dem Ausdruck

$$\frac{d^2F}{du\,dv'} - \frac{d^2F}{dv\,du'} - \frac{d^2F}{du'dv'}\,\frac{\left(u'\,\frac{dv'}{dt} - v'\,\frac{du'}{dt}\right)}{u'\ .\ v'}$$

setzt man nun für F den Ausdruck

$$\sqrt{e\,u'^2 + 2f\,u'\,v' + g\,v'^2}$$

so dass also das Integral die Länge eines gewissen Curvenstückes darstellt, so wird $\frac{H}{\sqrt{eg - f^2}}$ grade gleich der geodätischen Krümmung der betreffenden Curve.

Seien zwei Punkte auf der Fläche durch eine feste Curve verbunden; es wird eine zweite Curve von gegebener Länge gesucht, welche die beiden Punkte verbindet und mit der ersten einen möglichst grossen oder möglichst kleinen Flächeninhalt einschliesst. Gesetzt eine solche Curve sei gefunden, so muss sie in beliebig kleinen Theilen dieselbe Aufgabe lösen. Von der festen Curve ist sie unabhängig; denn die Veränderung derselben würde den Flächeninhalt nur um eine Constante verändern.

Wir können daher einen so kleinen Theil der Curve betrachten, dass er in ein Flächenstück gehüllt werden kann, innerhalb dessen $e\,g - f^2$ nicht gleich Null und nicht unstetig wird. Untersuchen wir nun, welchen Bedingungen dieses Curvenstück genügen muss. Wir verbinden seine Enden durch eine beliebige innerhalb des Flächenstücks verlaufende Curve.

Alsdann lässt sich das Integral, welches den Flächeninhalt darstellt, in ein Randintegral verwandeln. Durchlaufen wir die Curve so, dass der Inhalt immer auf der positiven Seite der Richtung des Durchlaufens liegt.

Setzen wir $\frac{d^2\varphi}{du\,dv} = \sqrt{e\,g - f^2}$, so ist

$$\int \sqrt{e\,g - f^2}\ .\ du\ dv = \tfrac{1}{2}\int \frac{d}{du}\left(\frac{d\varphi}{dv}\right) du\ dv + \tfrac{1}{2}\int \frac{d}{dv}\left(\frac{d\varphi}{du}\right) du\ dv$$

und folglich gleich

$$\tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\varphi}{dv}\ .\ v' - \frac{d\varphi}{du}\,u'\right) dt$$

Der Beitrag, welchen das zu untersuchende Curvenstück hierzu liefert, ist

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d\varphi}{dv} v' - \frac{d\varphi}{du} u' \right) dt$$

(wenn den Enden desselben die Werthe t_0 und t_1 zukommen.) Bilden wir für dieses Integral den Ausdruck für H, welcher hier mit H_1 bezeichnet werde, so muss das Curvenstück nach den Regeln der Variationsrechnung der Differentialgleichung

$$H_1 - \lambda H = 0$$

genügen . (wo λ eine Constante bedeutet).

Nun wird aber

$$H_1 = \sqrt{eg - f^2}$$

Mithin

$$\frac{H}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

D. h. die geodätische Krümmung des Curvenstücks muss constant sein. Ob das Integral ein Maximum oder Minimum ist, hängt davon ab, ob

$$- \frac{\lambda}{u' v'} \frac{d^2F}{du' dv'}$$

positiv oder negativ ist. Nun aber wird

$$- \frac{1}{u' v'} \frac{d^2F}{du' dv'} = \frac{eg - f^2}{\sqrt{e u'^2 + 2f u' v' + g v'^2}}$$

Da diese Grösse positiv ist, so ist das Integral also ein Maximum oder Minimum je nachdem λ positiv oder negativ ist, oder je nachdem die geodätische Krümmung der Curve positiv oder negativ ist.

Da der Flächeninhalt auf der positiven Seite der Curve liegt, so muss also eine geodätische Tangente an dieselbe in der Nähe des Berührungspunktes im ersten Falle ausserhalb im zweiten Falle innerhalb des Flächenstückes, welches die Curve umgrenzt, liegen.

Für die Ebene ist die gewöhnliche Krümmung mit der geodätischen Krümmung identisch, weil die geodätischen Linien mit den Graden identisch sind. Die Curven constanter geodätischer Krümmung sind hier also Kreise. Diese Bemerkung ist es wahrscheinlich, welche Minding*) zu der Vermuthung geführt hat, Linien constanter geodätischer Krümmung seien mit geodätischen Kreisen identisch. Denn beide Arten von Curven bilden die Analoga zu Kreisen in der Ebene. Es ergiebt sich aber auf folgende Weise, dass sie nur auf gewissen Flächen identisch sein können.

*) Crelle, Bd. 5.

Legen wir eine beliebige Curve zu Grunde, für die u Linien wählen wir alle auf ihr senkrecht stehenden geodätischen Linien, für u die Länge derselben von der betreffenden Curve abgerechnet, so wird, wie wir oben sahen, das Quadrat des Linienelementes:

$$du^2 + g\, dv^2$$

Die geodätische Krümmung der r Parameterlinien, welche man füglich Parallelcurven nennen könnte, ist

$$-\alpha'' \cdot \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{g^3}}$$

oder

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{du} \frac{1}{g}$$

oder

$$\frac{d \lg \sqrt{g}}{du}$$

Gesetzt jede der v Parameterlinien habe constante geodätische Krümmung, so müsste $\frac{d \lg \sqrt{g}}{du}$ nur Function von u sein, und daraus folgt

$$\sqrt{g} = \varphi\, u \,.\, \psi\, v$$

Wenn daher statt v eine andre Grösse v^1 gesetzt wird, welche mit v durch die Gleichung

$$\psi\, v \,.\, dv = dv^1$$

verbunden und nur Function von v ist, so erhält das Quadrat des Linienelementes die Gestalt:

$$du^2 + \varphi^2\, u \,.\, dv^2$$

Dieselbe Gestalt hat aber das Quadrat des Linienelementes derjenigen Rotationsfläche, deren Meridiancurve durch die Gleichung

$$r = \varphi\, (u)$$

(wo u die Bogenlänge, r der Abstand von der Rotationsachse ist) bestimmt ist.

Wir haben somit den folgenden Satz gewonnen:

Existirt auf einer Fläche eine Schaar von Parallelcurven, von denen jede constante geodätische Krümmung besitzt, so ist die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar, und zwar so, dass die Parallelcurven zu Parallelkreisen werden.

Da das Krümmungsmass nur von den Coefficienten des Quadrats des Linienelementes abhängt, so ist klar, dass in diesem Falle jede Parallelcurve der Schaar auch eine Linie constanten Krümmungsmasses ist.

Die um einen Mittelpunkt beschriebenen geodätischen Kreise bilden eine Schaar von Parallelcurven. Soll daher auf einer Fläche jeder geodätische Kreis constante geodätische Krümmung besitzen, so darf das Krümmungsmass sich längs eines geodätischen Kreises

nicht ändern, und ist folglich auf der ganzen Fläche constant, da man zwei hinreichend nahe an einander gelegene Punkte stets durch einen geodätischen Kreis verbinden kann.

Es könnten daher nur auf Flächen constanten Krümmungsmasses die beiden Curvenarten identisch sein. Wir werden sogleich sehen, dass es hier in der That der Fall ist. —

Sei das Linienelement einer Fläche auf die Form gebracht:

$$du^2 + g\,dv^2$$

u ist die Länge der geodätischen Normalen einer gewissen Curve. Betrachten wir eine dieser Normalen, für welche z. B. $v = v_0$. Lassen wir u wachsen, und sei u_0 der erste Werth, für welchen g verschwindet. Nehmen wir nun an, dass für den Punkt $u_0\ v_0$, $x\ y\ z$ ebenfalls noch nach Potenzen von $u\text{-}u_0$, $v\text{-}v_0$ entwickelbar sind, so muss für denselben der Abstand zweier u Linien, welcher gleich

$$\sqrt{g}\,(v\text{-}v_0) + (v\text{-}v_0)_2$$

ist, gegen $v\text{-}v_0$ unendlich klein werden. Und da derselben Zunahme von v an anderen Punkten der geodätischen Linie ein Abstand entspricht, welcher von derselben Ordnung mit $v\text{-}v_0$ unendlich klein wird, so sagt man in $u_0\ v_0$ schneiden sich zwei auf einander folgende u Linien. Die Curve

$$g = 0$$

hat in jedem Punkte die Richtung der geodätischen Linie, von welcher sie in dem Punkte getroffen wird. Denn lasse ich u_0 und v_0 zunehmen, so jedoch, dass $g = 0$ bleibt, so ist der Cosinus des Winkels, welchen die entsprechende Richtung mit derjenigen macht, welche der Zunahme von u_0 allein entspricht, gleich *1*.

Die Länge der Curve $g = 0$ zwischen zwei Punkten wird

$$\int_{u_2}^{u_1} du = u_2 - u_1$$

Daraus geht hervor, dass man sich die Parallelcurven durch die Punkte eines gespannten Fadens beschrieben denken kann, der von der Curve $g = 0$ abgewickelt wird. Die Curve $g = 0$ entspricht also der Evolute einer Schaar von Parallelcurven in der Ebene. Es kann eine Curve auf beiden Seiten eine solche Evolute besitzen.

Die Länge der geodätischen Normale von der betrachteten Curve bis zur Evolute ist das, was dem Krümmungsradius in der Ebene entspricht.

Im Allgemeinen kann nun die Länge dieser Normalen allein den Werth der geodätischen Krümmung nicht bestimmen; denn sonst wären die geodätischen Kreise ja Curven constanter geodätischer Krümmung und die Fläche müsste von constantem Krümmungsmass sein. Dies führt uns auf die Vermuthung, dass bei diesen Flächen die geodätische Krümmung nur von der Länge jener Normale abhängt.

$$du^2 + g\,dv^2$$

Weun k das Krümmungsmass, so ist:

$$- \sqrt{g} \, . \, k = \frac{d^2 \sqrt{g}}{d \, v^2}$$

Mithin, wenn k constant:

$$\sqrt{g} = a \, sin \, (\sqrt{k} \, . \, u) + b \, cos \, (\sqrt{k} \, . \, u)$$

wo a und b Functionen von v allein sind.

Die geodätische Krümmung irgend einer v Linie im Punkte $u_0 \; v_0$ ist

$$\left(\frac{d \, lg \sqrt{g}}{d \, u} \right)_{u = u_0 \, , \, v = v_0}$$

Die diesem Punkte entsprechende geodätische Normale ist gegeben durch

$$v = v_0$$

Diesen Werth setze ich in $\sqrt{g}$ ein und lasse u von u_0 an wachsen, bis zu einem Werthe u_1, für welchen $\sqrt{g}$ verschwindet

$$a_0 \, sin \, (\sqrt{k} \, u_1) + b_0 \, cos \, (\sqrt{k} \, u_1) = 0$$

Nun ist

$$\frac{d \, lg \sqrt{g}}{d \, u} = \sqrt{k} \, \frac{a \, cos \, (\sqrt{k} \, u) - b \, sin \, (\sqrt{k} \, u)}{a \, cos \, (\sqrt{k} \, u) + b \, sin \, (\sqrt{k} \, u)}$$

und also für den Punkt $u_0 \; v_0$

$$\sqrt{k} \, . \, \frac{a_0 \, cos \, (\sqrt{k} \, u_0) - b_0 \, sin \, (\sqrt{k} \, u_0)}{a_0 \, sin \, (\sqrt{k} \, u_0) + b_0 \, cos \, (\sqrt{k} \, u_0)}$$

oder

$$\sqrt{k} \, . \, \frac{cos \, (\sqrt{k} \, u_1) \, cos \, (\sqrt{k} \, u_0) + sin \, \sqrt{k} \, u_1) \, sin \, (\sqrt{k} \,) u_0}{cos \, (\sqrt{k} \, u_1) \, sim \, (\sqrt{k} \, u_0) \, sim \, (\sqrt{k} \, u_1) \, cos \, (\sqrt{k} \, u_0)}$$

oder

$$\sqrt{k} \, . \, ctg \, \sqrt{k} \, (u_0 - u_1)$$

Lasse ich u abnehmen bis zu einem Werth, für welchen $\sqrt{g}$ verschwindet, so ändert sich nichts in der Herleitung. Die erhaltene Formel hat für reelle Werthe von u_0-u_1 auch dann noch eine reelle Bedeutung, wenn k negativ ist.

Setzen wir in diesem Fall

$$k = - \varkappa^2$$

so kommt, da

$$cotg \, (i \, x) = \frac{1}{i} \, cotg_h \, (x)$$

$$\varkappa \, . \, cotg_h \, (u_0 - u_1)$$

Es frägt sich nur, ob man nach beiden Seiten hin einen reellen Werth von u erhält, welcher $\sqrt{g}$ zu Null macht

1. k positiv, so sind a und b reell, dann ist die Gleichung

$$a \, sin \, \sqrt{k} \, n + b \, cos \, \sqrt{k} \, u = 0$$

immer durch reelle Werthe von u zu lösen.

2. $k = -\varkappa^2$ so können wir schreiben

$$\sqrt{g} = a' \sin_h(\varkappa u) + b' \cos_h(\varkappa u) = 0$$

a' und b' sind reell. Diese Gleichung ist nur dann nicht zu lösen, wenn $a' = 0$. Wenn aber $a' \lesseqgtr 0$, so ist sie stets zu lösen. aber nur durch einen einzigen reellen Werth von u. —

Die positive Seite der v-Linie ist diejenige, nach welcher u abnimmt. Wenn wir daher mit r die Länge des verallgemeinerten Krümmungsradius bezeichnen, und ihn positiv oder negativ rechnen, je nachdem er auf der positiven oder negativen Seite einer Curve liegt, so ist

$$\sqrt{k}\, cotg\, (\sqrt{k}\, r)$$

die geodätische Krümmung.

Lässt man k unendlich klein werden, so nähert sich diese Grösse dem Grenzwerth

$$\frac{1}{r}$$

welcher, wie bekannt, die Krümmung einer Curve in der Ebene darstellt.

Jeder geodätische Kreis hat also auf den Flächen mit constantem Krümmungmaass auch constante geodätische Krümmung.

Jede Curve constanter geodätischer Krümmung ist ein geodätischer Kreis, sobald sich die geodätischen Normalen schneiden.

Denn die Evolute muss, wenn sie überhaupt existirt ein Punkt sein; sonst verändert sich die Länge der Normalen bei der Abwickelung.

Wenn aber keine Evolute existirt, so muss, wie wir sahen, k negativ sein, und das Quadrat des Linienelements die Form haben

$$du^2 + g\, dv^2$$
$$\sqrt{g} = b' \cos_h(ku)$$

und setzt man

$$b'\, dv = dv'$$

so wird es

$$du^2 + \cos_h{}^2(ku)\, dv'^2$$

Die betreffenden Curven sind also solche, welche bei der Abwickelung der Fläche auf die Rotationsfläche, deren Meridiancurve durch

$$\cos_h(u) = r$$

gegeben ist, in Parallelkreise übergehen. Fasst man diese mit unter dem Namen geodätische Kreise zusammen, so sind allgemein die geodätischen Kreise und Curven constanter geodätischer Krümmung auf diesen Flächen identisch.

Lebenslauf.

Ich Karl Runge bin am 30. August 1856 geboren und gehöre der evangelischen Confession an. Vom 12. bis zum 20. Jahre besuchte ich das Gymnasium zu Bremen mit Ausnahme zweier Jahre, während deren ich Schüler des Victoria-Instituts zu Falkenberg i./M. war. Nach bestandenem Maturitätsexamen reiste ich auf 6 Monate nach Italien und sah Venedig, Florenz, Rom und Neapel. Ostern 1876 bezog ich die Universität zu München und entschloss mich im Herbst desselben Jahres Mathematik zu studiren. Im Herbst 1877 siedelte ich nach Berlin über, wo es mir vergönnt war die Vorlesungen der Herren Prof. Borchardt, Kirchhoff, Kronecker, Paulsen und Weierstrass zu hören. Allen meinen Lehrern, besonders aber den Herren Professoren Paulsen und Weierstrass, denen ich das Beste meines Wissens und Könnens schuldig bin, sage ich Dank für Alles, was sie an mir gethan haben.

Thesen.

1. Kant's Behauptung, dass der Wille des Menschen frei sei, hat keinen Sinn mehr nachdem er zugegeben, dass die Willens-Erscheinungen dem Gesetze der Causalität unterworfen seien.

2. Von aller Claviermusik ist diejenige Chopin's der Eigenthümlichkeit des Instruments am meisten angepasst.

3. Der Werth einer mathematischen Disciplin ist nach ihrer Anwendbarkeit auf empirische Wissenschaften zu schätzen.